

Table des matières

0.1	Introduction générale :	4
1	Notions générales sur les fluides :	6
1.1	Introduction :	6
1.2	Définition et propriétés des fluides :	6
1.3	Cinématique d'un fluide :	9
1.3.1	Notions générales :	9
1.3.2	Définition du mouvement :	10
1.3.3	Les lignes des fluides :	11
1.3.4	Description d'un fluide :	13
1.3.5	Types d'écoulements :	15
1.3.6	Conservation de la masse (équation de continuité) :	16
1.4	Dynamique des fluides parfaits incompressibles :	18
1.4.1	Èquation d'Euler :	18
1.4.2	Èquation de Bernoulli :	21
1.4.3	Ècoulement bidimensionnel,stationnaire irrotationnel d'un fluide parfait incompressible :	22
2	Problème d'écoulement dans un curved nozzle sans effets de tension de surface et de gravité :	26
2.1	Introduction :	26
2.2	La transformation conforme :	26

2.3	Théorie des lignes de courant libres :	28
2.4	Transformation de <i>Schwartz-Christoffel</i> :	29
2.5	Position du problème :	32
2.6	La solution exacte :	34
3	Résolution de problème d'un écoulement potentiel de fluide parfait in-	
	compressible par la méthode des Différences Finies	41
3.1	Introduction	41
3.2	Position l'équation :	42
3.3	l'application de la méthode des différences finies :	44
3.3.1	Formulation :	44
3.3.2	Le maillage :	46
3.3.3	Le schéma numérique :	46
3.3.4	Formulation :	47
3.3.5	Le maillage :	47
3.3.6	Le schéma numérique :	48
4	Annexes	49
4.1	Annexe 1 :	49
4.1.1	Outils mathématiques de la théorie des champs :	49
4.2	Annexe 2 :	53
4.2.1	Introduction à la méthode des différences finie :	53
	Conclusion	57
	Bibliographie	58

Notations :

\vec{F} = Les forces.

g = Constante de gravitation.

P = Pression.

$\vec{\gamma}$ = Accélération.

v = Vitesse d'écoulement.

U = Vitesse initiale.

V = Volume de fluide.

ρ = Masse volumique.

δ = Tension superficielle.

E = Le module d'élasticité.

Q_m = Débit massique.

Q_V = Débit volumique.

ϕ = La potentiel de vitesse.

ψ = Fonction de courant.

0.1 Introduction générale :

La mécanique des fluides est l'étude du repos et du mouvement des liquides et des gaz. Il s'agit d'une branche de la mécanique des milieux continus qui soulève des nombreux problèmes que doit résoudre l'ingénieur et ce dans des domaines divers. On peut mentionner les problèmes d'écoulements des liquides dans les conduites ou les canaux, les écoulements d'air autour d'ailes de fuselages d'avions dans les tuyères, les problèmes posés par le calcul des compresseurs et turbomachines, le dimensionnement des échangeurs thermiques, etc...

De même on ne peut passer sous silence les problèmes rencontrés en acoustique, en météorologie, en océanographie.

Applications de la mécanique des fluides intéressent aussi la médecine, la biomécanique et l'étude des machines pour la conversion de l'énergie du vent les éoliennes.

Le problème classique de l'écoulement aérodynamique d'un fluide parfait a été étudié par beaucoup de chercheurs. Des premiers travaux dans ce secteur sont caractérisés par l'utilisation de la méthode de hodographe et de la formule de Schwartz-Christoffel, qui peuvent traiter les écoulements qui ont une géométrie polygonale.

Dans le présent travail on propose d'étudier un écoulement à surface libre dans un obstacle à la forme d'un réservoir. L'écoulement est supposé bidimensionnel et stationnaire irrotationnel c'est à dire écoulement potentiel avec les effets de gravité et de tension de surface sont négligées. Théoriquement on peut calculer la solution exacte en utilisant la transformation de Schwartz-Christoffel.

Ce mémoire est divisé en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, présente les notions générales et les équations fondamentales de la dynamique des fluides, une représentation des équations : l'équation de continuité, l'équation d'Euler et l'équation de Bernoulli d'un fluide parfait incompressible et donner à la fin du chapitre l'utilisation de la théorie de la variable complexe.

Dans le second chapitre : on considère que les effets des forces de gravité et les tensions de surface sont nuls et en utilisant alors la méthode des lignes des courants libres

introduites par Kirchhoff qui est basée sur les transformations conformes pour obtenir une solution exacte. On utilise le théorème de Schwartz-Christoffel qu'elle nous permet de trouver toujours une transformation conforme qui transforme l'intérieur d'un polygone en demi-plan supérieur (ou inférieur) d'un autre plan.

Enfin, dans le dernier chapitre, en essayant de poser le problème (l'équation de Bernoulli) dans le cadre de la résolution par la méthode des différences finies.

Chapitre 1

Notions générales sur les fluides :

1.1 Introduction :

Dans ce chapitre :on présente les notions générales et l'équations générales du mouvement des fluides ainsi que les écoulements bidimensionnels ,irrotationnel et stationnaire.On présente les définitions et les propriétés des fluides et cinématique d'un fluide et dynamique d'un fluide parfait incompressible .

1.2 Définition et propriétés des fluides :

Définition :

Un fluide peut être considéré comme étant formé d'un grand nombre de particules matérielles, très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres, un fluide est donc un milieu matériel continu, déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler.

-On peut répartir les fluides en liquides et en gaz.

Masse volumique ρ :

La masse volumique est définie par la relation

$$\rho = \frac{M}{V} \quad (kg/m^3) .$$

Pression d'un fluide P :

La pression est définie localement à partir de la composante de la Force normale à la surface sur laquelle elle s'exerce, si on considère une surface élémentaire ds de normale \vec{n} subissant une force \vec{F} , alors la pression P est définie par

$$\vec{dF} \cdot \vec{n} = Pds$$

Dans le cas d'une force perpendiculaire à une surface plane d'aire S , on obtient la définition suivant :

$$P = \frac{F}{S} \quad (Pa = N/m^2) .$$

Tension superficielle :

Une molécule située à l'intérieur d'un liquide est soumise à des forces d'attraction agissant dans toutes les directions, et la somme vectorielle de ces forces est nulle. Cependant, une molécule située à la surface d'un liquide est soumise à une force de cohésion bien déterminée, dirigée vers l'intérieur et perpendiculaire à la surface .

Ainsi, pour déplacer les molécules vers la surface, il faut fournir un travail résistant contre cette force ; les molécules de la surface ont donc plus d'énergie que les molécules internes.

La tension superficielle σ d'un liquide est égale au travail que l'on doit fournir pour apporter des molécules en quantité suffisante de l'intérieur du liquide vers la surface, pour

former une nouvelle unité d'aire de cette même surface .

Les molécules en surface ayant acquis de l'énergie, se comportent comme si elle formaient une feuille étirée et

$$\sigma = \Delta F / \Delta L$$

Dans cette formule ΔF est la force élastique perpendiculaire à tout élément ΔL de la surface .D'après la définition ,l'unité de tension superficielle est bien le newton par mètre (N/m) .

La valeur pour l'eau à 0 °C est 0.0756 N/m .

La compressibilité du fluides :

Lorsque soumis à une force de pression de fluide liquide ou gaz ,il ya un changement dans le volume du fluide ce changement en rapport avec le degré de résistance au fluide à ce changement.Ce qui détermine le degré de résistance à compression est compressibilité.Le module d'élasticité(compressibilité) E est lié à la compressibilité du fluide.

C'est rapport de la variation de pression à la variation relative de volume :

$$E = dp / (dV/V) .$$

où :

dp = petites variations de la pression

dV = petites variation du volume

V = volume initial du fluide

L'unité SI du le module d'élasticité est ($N/m^2 = Pa$).

De la pression liquide normale ne réduit pas la volume,par conséquent on peut supposer que la densité du liquide reste constant sous l'influence de la pression,due à la module d'élasticité est très grande,liquide donc appelé fluide incompressible.

Mais,les pressions faibles réduire considérablement de volume du gaz,c'est pourquoi le changement de densité par une quantité importante,le gaz donc appelé fluide compressible.

fluides incompressibles :

Un fluide est dit incompressible si sa masse volumique reste constante au cours du mouvement :

$$\rho = \rho_0(x)$$

x : position du matériel à l'instant initiale.

Fluide parfait :

On dit que un fluide est un fluide parfait si la viscosité et les frottement de ce fluide sont nuls ou négligeables, par exemple : l'eau.

1.3 Cinématique d'un fluide :

1.3.1 Notions générales :

Nous allons étudier le mouvement des particules de fluide sans faire intervenir les forces qui entrent en jeu. On décrit mathématiquement l'état d'un fluide en mouvement au moyen de fonctions déterminant la distribution de la vitesse du fluide $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$, et de la pression $P(x, y, z, t)$ et de sa masse volumique $\rho(x, y, z, t)$. La vitesse \vec{v} est un vecteur de composant v_x, v_y, v_z qui dépendent des coordonnées x, y, z du point considéré et de l'instant t de l'observation. L'ensemble de ces vecteurs constitue un champ de vecteur appelé champ de vitesse.

On peut donc dire que cinq grandeurs déterminent l'état du fluide en mouvement : les trois composantes (v_x, v_y, v_z) de la vitesse \vec{v} , la pression P et la masse volumique ρ , toutes ces grandeurs sont en général des fonctions des coordonnées x, y, z et le temps t .

La vitesse $\vec{v}(x, y, z, t)$ est la vitesse du fluide en chaque point x, y, z de l'espace à l'instant t , c'est à dire qu'elle est liée à des points déterminés de l'espace, et non aux

particules qui se déplacent au cours du temps, dans l'espace, il en est de même pour P et ρ .

1.3.2 Définition du mouvement :

La mécanique des fluides traite des systèmes qui peuvent au cours du temps changer de forme. C'est un système complexe, de même particule qui change de forme dans le temps.

Nous allons maintenant expliquer le passage d'une configuration à une autre entre les dates t' et t :

soit (x_1, x_2, x_3) la position de M^t de la particule M à t , et soit (x'_1, x'_2, x'_3) la position de $M^{t'}$ de la particule M à t' considérons l'application $g : \Omega_{t'} \longrightarrow \Omega_t$ tel que :

$$g : x' \longrightarrow x$$

On a :

$$x = g(x', t', t)$$

g donne à l'instant t la position M^t de M . C'est une fonction régulière de (variable d'espace) et elle vérifie les propriétés suivantes :

$$-g(x, t, t) = x$$

$$-g(x', t', t) = g(g(x', t', t''), t) \text{ (transitivité)}$$

$$-g(x, t, t') = x' \text{ (transformation inverse)}$$

L'application g est une bijection de $\Omega_{t'} \longrightarrow \Omega_t$, on note $f = g^{-1}$ sa réciproque.

1.3.3 Les lignes des fluides :

Trajectoire :

On appelle trajectoire la courbe orientée décrite par une particule au cours de son mouvement, c'est-à-dire l'ensemble des positions occupées successivement entre deux instants (Figure 2.3(a))

Les équations suivantes définissent les trajectoires :

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z, t)} = dt$$

Lignes d'émission :

Une ligne d'émission est l'ensemble des positions à un instant t de toutes les particules fluides qui sont passées par un point p à un instant quelconque précédent (Figure 2.3(a))

Lignes de courant :

a) Définition : On appelle ligne de courant une courbe tangente en chacun de ses points au vecteur vitesse en ce point (Figure 2.3(b))

Les lignes de courant sont les intégrales du système différentiel :

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z, t)}$$

b) Tubes de courant : On désigne ainsi une surface tubulaire engendrée à un instant donné par toutes les lignes de courant qui s'appuient sur une courbe arbitraire fermée (Figure 2.3(c)).

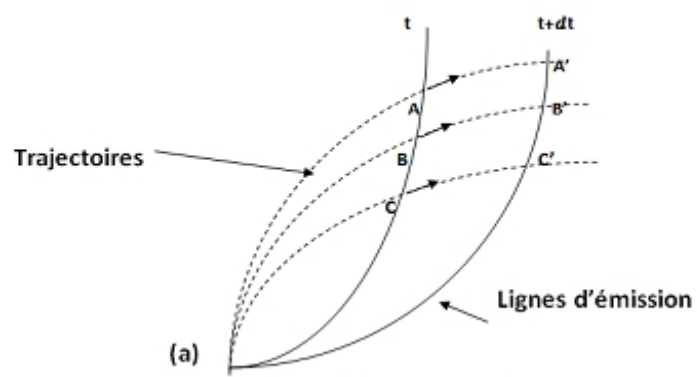
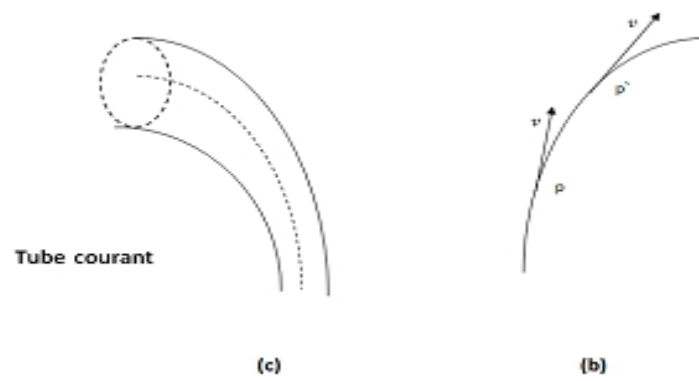


Figure 2.4 : (a), (b), (c) Les lignes des fluides

1.3.4 Description d'un fluide :

Description de lagrange :

Considérons une particule de fluide p , placé en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ à l'instant t_0 . Dans la description de lagrange, on suit le mouvement d'une particule de fluide, par exemple, la particule de fluide dont il est question précédemment, sera en $M(x, y, z)$ à l'instant t (Figure 1.3.a), on peut déterminer la trajectoire de la particule de fluide si l'on connaît les fonction :

$$\begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases}$$

La vitesse de la particule s'écrit : $\vec{v}(p) = (v_x, v_y, v_z)^t = \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t} \right)^t$

description de lagrange \implies trajectoire des particule de fluide

Description d'Euler :

On va considérer le fluide dans son ensemble à l'instant t .

On définit en chaque point du système les grandeurs :

$M(x, y, z, t)$, $P(x, y, z, t)$, $\vec{v}(x, y, z, t)$ etc ... Ainsi, à un instant t , on peut représenter les champs scalaires (M et P) à l'aide d'iso-surface, et les champs vectoriels (vitesse et accélération) à l'aide des lignes de champs.

Une ligne de courant est une ligne de champ du vecteur vitesse, c'est -à-dire une courbe tangente en tout point $M(x, y, z)$ à $\vec{v}(x, y, z, t)$ à l'instant t (Figure 1.3.b)

La formule de vitesse du particule de fluide est :

$$\vec{v}(p) = v_x(x, y, z, t) \vec{e}_x + v_y(x, y, z, t) \vec{e}_y + v_z(x, y, z, t) \vec{e}_z$$

Description d'Euler \implies ligne de courant

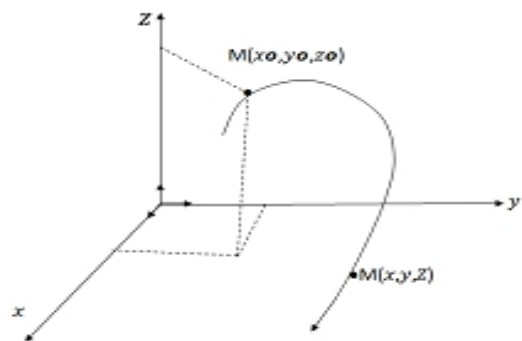


Figure 1.3.a :Trajectoire d'une particule de fluide.

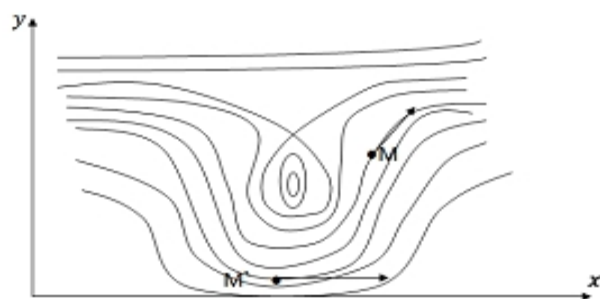


Figure 1.3.b :Ligne d'écoulement.

1.3.5 Types d'écoulements :

Écoulements stationnaires et instationnaires :

On dit qu'un écoulement est stationnaire(ou permanent) si toutes les variables décrivant le mouvement sont indépendantes du temps.

Ainsi la pression,la vitesse, d'un écoulement stationnaire sont des quantités indépendantes du temps .donc dans mouvement stationnaire, les lignes de courant sont confondues avec les trajectoires (réciproque fausse).

Un écoulement est dit instationnaire si les variables décrivant le mouvement dépendant du temps.

Écoulements bidimensionnels :

L'écoulement en général dépend de trois variables x, y, z . Il y a des cas particuliers qui ramènent à deux ces coordonnées :Les écoulement plans,pour les quels la vitesse, à l'instant t ,est pour tous les points parallèle à un plan fixe,choisi pour un plan xOy

Les écoulements de révolution autour d'un axe OO' ,qui sont entièrement définis par l'étude de l'écoulement dans un demi-plan méridien limite par l'axe OO' ,c'est le cas des écoulements axisymétriques.

Écoulements uniforme et non uniforme :

L'écoulement est dit uniforme quand la grandeur et la direction de la vitesse ne changent pas d'un point à un autre du fluide ,par exemple l'écoulement de liquides sous pression le long de longues canalisations de diamètre constant est uniforme.

On trouve en présence d'un écoulement non uniforme quand la vitesse,la profondeur et la pression,etc varient d'un point à un autre sur le parcours du fluide.

1.3.6 Conservation de la masse (équation de continuité) :

Vecteur densité de matière :

On cherche à exprimer la masse qui traverse une surface(S) lors d'un écoulement.

Pour cela, soit un cylindre infiniment petit : de base dS et génératrice $\vec{v} dt$, calculons la masse dm traversant cette élément de surface pendant la durée dt .

On a donc

$$dm = \rho dt dS \vec{v} \cdot \vec{n}$$

a) Débit massique : Le débit massique Q_m mesure qui traverse la surface S par unité de temps (unité : $kg.s^{-1}$)

$$Q_m = \iint_{(S)} \frac{dm}{dt} = \iint_{(S)} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

Pour une surface fermée

$$Q_m^{sortie} = \oint_{(S)} \rho \vec{v} \cdot dS \vec{n}$$

Où Q_m^{sortie} est le débit massique sortant si \vec{n} est dirigé vers l'extérieure (convention mathématique).

b) Débit volumique : Le débit volumique Q_V mesure le volume de fluide qui traverse la surface S par unité de temps (unité : $m^3.s^{-1}$)

$$Q_V = \iint_{(S)} \frac{1}{\rho} \frac{dm}{dt} = \iint_{(S)} \vec{v} \cdot dS \vec{n}$$

c) Densité de courant : On appelle vecteur densité de courant de matière le vecteur :

$$\vec{j} = \rho \vec{v}$$

Le débit massique est donc le flux du vecteur densité de courant de matière.

Èquation de continuité :

La masse se conservant ,cela se traduit par une équation de coservation de la mase ,dit aussi équation de continuité .

Prenons un système ouvert de volume constant V ,entouré par une surface fictive (S) .

Soit $M(t)$ la masse contenue dans (S) à l'instant t ,cette masse varie si le débit massique entrant est différent du débit massique sortant,ce qui modifie la masse volumique du système (S) :

$$M(t) = \iiint_{(V)} \rho(x, y, z, t) dx dy dz$$

$$\frac{dM(t)}{dt} = \iiint_{(V)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz = - \iint_{(S)} \rho \vec{v} \cdot dS \vec{n}$$

D'après le théorème de la divergence on obtient :

$$\iiint_{(V)} (\text{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t}) dx dy dz = 0 \quad \forall V$$

Où l'équation de contiuité

$$\text{Èquation de continuité : } \text{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Cas fluides incompressibles : Si la masse volumique est constante,l'équation de continuité se simplifie

$$\text{div} \vec{v} = 0 \Rightarrow \oint_{(S)} \vec{v} \cdot dS \vec{n} = 0$$

La vitesse est à flux conservatif.

1-De plus ,si l'écoulement est irrotationnel c'est à dire $(\vec{rot} \vec{v} = 0)$,ona $\text{div} \vec{v} = 0$

alors il existe une fonction potentielle ϕ tel que

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}\phi}$$

donc l'équation de continuité :

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}\phi}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

2-De plus,si l'écoulement est stationnaire c'est à dire ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$),donc l'équation de continuité est :

$$\text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

1.4 Dynamique des fluides parfaits incompressibles :

1.4.1 Équation d'Euler :

L'aspect dynamique du mouvement des fluides est régit par les équations du mouvement ces équations sont obtenues en appliquant la loi de newton sur des particules de fluide.On s'intéressera dans cet partie aux fluides parfaits uniquement pour lesquels le frottement est négligé,le fluide est dit dans ce cas fluide parfait.Dans cette situation,les types de forces qui vont agir sont de la sorte

1-Forces de volume,exemple :la force de pesanteur.

2-Forces de surfaces,pression uniquement.Ces forces agissent normalement aux surfaces en question.

3-Forces d'inertie,comme exemple,on les forces d'accélération des particules.

La loi de Newton du mouvement est comme suit :

$$\sum \vec{F} = m \vec{\gamma}$$

Pour illustrer le développement des équations qui régissent le mouvement de particules

de fluide, on considère, pour la simplicité de l'illustration, une représentation cartésienne bidimensionnelle suivant la direction (Ox) on a :

$$F_x = m\gamma_x$$

La particule de fluide est représentée en deux positions à deux instants t et $t + dt$ on a

$$\gamma_x = \frac{du}{dt}$$

$u(x, y, t)$: La composante de la vitesse varie avec la position et avec le temps. En négligeant les termes d'ordre supérieur, on peut écrire :

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

Les variations infinitésimales dans les positions dx et dy de la particule de fluide sont données par les équations de la trajectoire

$$dx = u dt \text{ et } dy = v dt$$

L'accélération dans la direction x est :

$$\gamma_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}$$

On reconnaît le développement de la dérivée particulaire (matérielle) :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$$

Soit pour le vecteur accélération :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

La forme vectorielle de $\vec{\gamma}$ est :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}P + \vec{F}$$

$-\vec{F}$ la force de volume.

$-P$ la pression.

$-\rho$ la masse volumique.

Cette équation développée par Euler est nommée

$$\text{Équation d'Euler : } \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}P + \vec{F} \quad (3.1.1)$$

Le cas où la force de volume \vec{F} dérive d'un potentiel :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}U \quad (3.1.2)$$

En générale, on se trouve dans le champ de pesanteur :

$$U = gh$$

–L'équation d'Euler peut être écrite sous une autre forme

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}P + \vec{F} \\ \iff \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \overrightarrow{grad})\vec{v} &= -\frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}P + \vec{F} \\ \iff \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \overrightarrow{\nabla})\vec{v} &= -\frac{1}{\rho}\overrightarrow{\nabla}P + \vec{F} \end{aligned}$$

En remplaçant cette expression dans l'équation (3.1), on a :

$$\text{Équation d'Euler : } \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla \vec{v}^2 + \frac{1}{\rho}\overrightarrow{\nabla}P = \vec{F} + \vec{v} \overrightarrow{rot}\vec{v} \quad (3.1.3)$$

1.4.2 Équation de Bernoulli :

A partir de l'équation d'Euler pour un fluide incompressible et parfait et lorsque les forces de volume dérivent d'un écoulement stationnaire irrotationnel :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{grad}P - \vec{grad}U$$

On rappelle l'identité vectorielle :

$$(\vec{v} \cdot \vec{grad})\vec{v} = \vec{grad}\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right) + (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{grad}\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right) + (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} &= -\frac{1}{\rho}\vec{grad}P - \vec{grad}U \\ \iff \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) + (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} &= 0 \end{aligned}$$

On rappelle la forme du vecteur tourbillon :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\vec{rot}\vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \times \vec{v})$$

et dans le cas d'un écoulement stationnaire c'est à dire $\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0\right)$ alors, on peut écrire :

$$\vec{grad}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + U\right) + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} = 0$$

On projette cette équation sur une ligne de courant de vecteur unitaire s , on a alors :

$$\frac{\partial}{\partial s} = \vec{s} \cdot \vec{grad}$$

Ce qui donne :

$$\vec{s} \overrightarrow{grad}(\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + U) + \vec{s} (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} = 0$$

Comme s et v sont colinéaires :

$$\vec{s} (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} = 0$$

Ainsi, on a :

$$\frac{\partial}{\partial s}(\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + U) = cte$$

Le long d'un ligne de courant on a alors :

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + U = cte$$

-Dans ce cas, les forces de volume se réduisent le plus souvent à la seule force de pesanteur, on a la forme simple de l'équation de Bernoulli, pour des fluides incompressibles parfaits d'un écoulement stationnaire irrotationnel est :

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz = cte \quad (3.1.4)$$

1.4.3 Écoulement bidimensionnel, stationnaire irrotationnel d'un fluide parfait incompressible :

Écoulement potentiel :

On rappelle qu'un écoulement irrotationnel ($\vec{\Omega} = \overrightarrow{rot} \vec{v} = 0$) on rappelle aussi qu'en mathématique une fonction, dont le rotationnel est nul, peut être toujours représentée par le gradient d'une fonction scalaire, car on a toujours :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad} \phi) = 0$$

On peut donc déduire :

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\phi$$

ϕ : la potentiel de vitesse.

Fonction de courant :

Dans l'écoulement bidimensionnels et le fluide est incompressible le concept de lignes de courant peut être rattaché à l'équation de continuité, c'est à dire :

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{v} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Soit une nouvelle fonction ψ définie par les équations suivantes :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

ψ est une fonction de x et y que l'on nomme fonction de courant .

La différentielle exacte de ψ donne :

$$\begin{aligned} d\psi &= \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \\ &= -v dx + u dy \end{aligned}$$

-Les courbe pour $\psi = cte$ sont des lignes de courant.

Écoulements particuliers :

Écoulements incompressible : l'écoulement est dit incompressible si la densité d'une particule fluide que l'on suit au cours du temps reste constante.

En tout point on a :

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \iff \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

Il existe un vecteur $\vec{A}(\vec{r}, t)$ tel que $\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{A}$.

–Écoulement dans le plan Oxy on peut prendre $\vec{A} = \psi \vec{e}_z$, ψ est fonction courant.

Écoulement irrotationnel : l'écoulement est dit irrotationnel si la rotation locale d'une particule fluide est nulle

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$$

Il existe une fonction scalaire $\phi(\vec{r}, t)$ telle que $\vec{v} = \operatorname{grad} \phi$, ϕ est fonction potentiel.

Écoulement potentiel bidimensionnel de fluide incompressible :

D'après l'équation de continuité pour un écoulement potentiel de fluide incompressible, on a :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

aussi l'équation de Laplace.

et d'après la définition de la fonction de courant :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

On a aussi pour le potentiel de vitesse :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{cases}$$

Donc la relation entre ϕ et ψ est :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

Ces équations sont connues comme celles de Cauchy-Riemann, qui permettent de trouver le potentiel de vitesse à partir de fonction de courant ou réciproquement.

On trouve que la fonction de courant satisfait aussi l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

Solution pour des écoulements potentiels bidimensionnels à utiliser de la théorie de la variable complexe :

La théorie de variables complexe est une méthode très puissante pour l'obtention de solutions de l'équation de Laplace.

On a les deux fonctions suivant d'un écoulement potentiel bidimensionnel sont des équations de Laplace :

La fonction potentielle ϕ et la fonction de courant ψ .

On utilise une nouvelle variable $z = x + iy$:

— On nomme potentiel complexe

$$f(z) = \phi + i\psi$$

tel i que le nombre complexe ($i^2 = -1$).

— On nomme vitesse complexe la fonction

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{df}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ &= u - iv \end{aligned}$$

Chapitre 2

Problème d'écoulement dans un curved nozzle sans effets de tension de surface et de gravité :

2.1 Introduction :

Dans ce chapitre on étudie l'écoulement potentiel bidimensionnel, stationnaire irrotationnel d'un fluide parfait incompressible dans un canal à la forme d'un réservoir – curved nozzle – avec les effets de gravité et de tension de surface sont négligées.

Dans ce cas la solution exacte existe et peut calculer par la méthode des lignes de courants libres et la transformation de schwartz-christoffel.

2.2 La transformation conforme :

Définition :

Une transformation conforme peut être définie informellement comme une transformation géométrique qui préserve les angles orientés. Autrement dit, c'est une transformation qui ressemble localement à une similitude directe, les similitudes directes sont les transla-

tions, les rotations, les homothéties et leurs composées.

Fonction holomorphes (analytiques) :

Soit $f(z)$ une fonction qui admet une dérivée, ses parties réelles et imaginaires sont différentiables et y vérifient les conditions de Cauchy, $f(z)$ définissant ainsi une fonction analytique.

Quelques transformations classiques :

1) Translation : Une translation correspond à la transformation

$$z \longrightarrow z + a$$

Où a également un nombre complexe, représente le vecteur de translation.

2) Rotation : Une rotation de centre 0 et d'angle θ , correspond à la transformation

$$z \longrightarrow e^{i\theta} z$$

3) Homothétie : Une homothétie de centre 0 et de rapport r , correspond à la transformation

$$z \longrightarrow r z$$

4) Transformation inverse : Transformation inverse est une transformation

$$z \longrightarrow z^{-1}$$

pour z non nul transforme les cercles en cercles ou droite, les lignes en droites ou

cercles ,selon que l'objet passe ou non par l'origine.

5)Transformation homographique : La transformation est

$$z \longrightarrow \frac{a z + b}{c z + d}$$

avec a, b, c, d des complexes ,transforme les cercles ou demi plan en droites et réciproquement.

2.3 Théorie des lignes de courant libres :

La théorie des lignes de courant libres consiste à étudier les problèmes d'écoulements bidimensionnel irrotationnel, stationnaire, bornés par les parois rigides rectilignes et des lignes de courant libres de formes inconnues, sur lesquelles la pression est supposée constante.

Si les lignes de courant libres ne sont pas présentes et les effets de gravité sont négligés, la région d'écoulement dans le plan physique est un polygone. Aussi si les lignes de courant libres sont présentes et l'effet de gravité ainsi que les effets de la tension de surface sont négligés, la région d'écoulement peut être transformée par une transformation conforme à une région polygonale.

Cette région est une partie du plan hodographe défini par

$$\Omega = \log(1/\frac{df}{dz}).$$

Dans les deux cas, on peut trouver la solution exacte du problème.

Dans le cas où l'écoulement est délimité partiellement par des surfaces libres, on donne la méthode de résolution introduite par *Kirchhoff* (1889).

L'idée est d'introduire la fonction complexe Ω définie par :

$$\Omega = \log(U/\frac{df}{dz}) = \log(\frac{U}{u-iv}) = \log(\frac{U}{q}) + i\theta$$

Où

$$f = \phi + i\psi, \frac{df}{dz} = u - iv, q = \sqrt{u^2 + v^2}$$

(u, v) sont les composantes du vecteur vitesse suivant les directions de l'axe des x et l'axe des y respectivement, θ est l'angle que fait le vecteur vitesse avec l'horizontale et U la vitesse de référence. La fonction Ω possède les propriétés suivants :

-La partie réelle de Ω est constante sur la ligne de courant libre, c'est à dire que

$$\log(\frac{U}{q}) = Cte.$$

-La partie imaginaire de Ω est constante sur chaque paroi rectiligne, c'est à dire que

$$\theta = Cte.$$

2.4 Transformation de *Schwartz-Christoffel* :

Nous considérons un polygône quelconque(Figure 1-a) dans un plan Ω , ayant pour sommets A_1, A_2, \dots, A_n et tels que

les angles intérieurs respectivement $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Soit les points A_1, A_2, \dots, A_n correspondants respectivement à $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de l'axe réel du plan des λ .

La transformation de Schwartz-Christoffel transforme l'intérieur d'un polygône en

demi-plan supérieur(ou inférieur) (Figure 1-b) d'un autre plan,et donné par :

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = a(\lambda - \lambda_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}(\lambda - \lambda_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1} \dots (\lambda - \lambda_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1}$$

Ou $\Omega = a \int (\lambda - \lambda_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}(\lambda - \lambda_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1} \dots (\lambda - \lambda_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1} d\lambda + b.$

$$\Omega = a \int (\lambda - \lambda_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi}-1}(\lambda - \lambda_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi}-1} \dots (\lambda - \lambda_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi}-1} d\lambda + b.$$

Où a et b sont des constantes complexe .

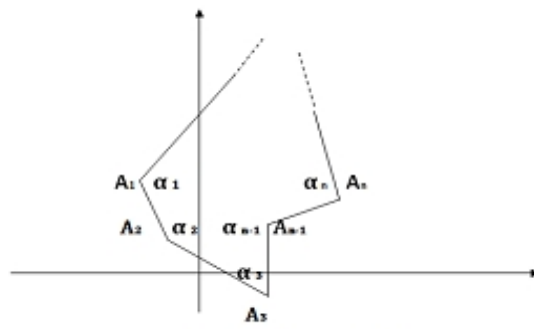


Figure1-a : plan variable Ω .

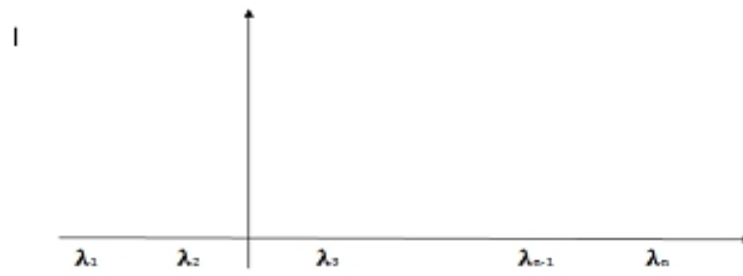


Figure 1-b :Plan variable λ

2.5 Position du problème :

On étudie un écoulement bidimensionnels, stationnaires et irrotationnels à surface libre d'un fluide parfait incompressible et effets de gravité et de tension de surface sont négligées dans un canal à la forme d'un réservoir (Figure-2).

Lorsque l'écoulement est symétrique, on peut alors étudier le problème seulement sur le demi plan supérieur, et on considère l'axe de symétrie comme l'axe $x'ox$. (Figure-3)

Et on choisit la paroi AB sur l'axe des x , et la paroi BC sur l'axe des x et y , et l'écoulement à l'infini est uniforme de vitesse U .

Et l'hauteur H , l'angle entre l'axe x et $\alpha = \frac{\pi}{4}$. et CD la surface libre.

Sur la surface libre, puisque la tension de surface et la gravité sont négligées, l'équation de Bernoulli donnée par :

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = cte$$

Où : v est la vitesse.

p est la pression.

ρ est la masse volumique.

La pression sur la surface libre est constante, alors l'équation de Bernoulli donnée par :

$$\frac{v^2}{2} = cte.$$

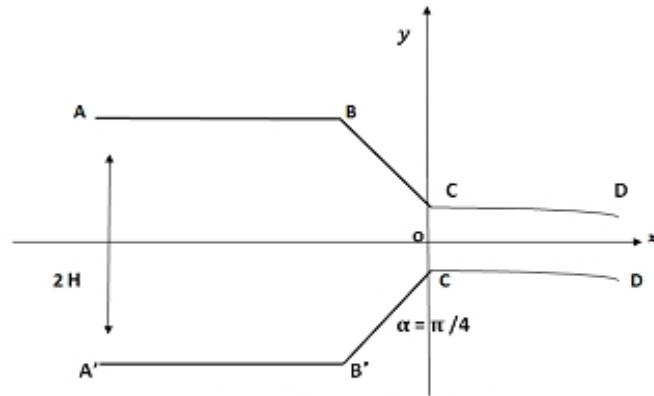
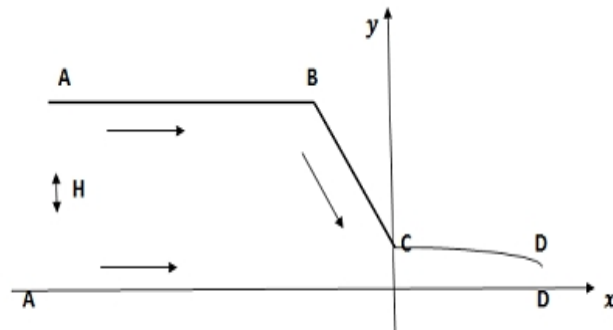


Schéma d'un écoulement bidimensionnel dans un canal à la forme d'une réservoir .



2.6 La solution exacte :

Si on néglige les tensions de surface et les forces de gravité, la solution exacte peut être calculée, on utilisant la transformation hodographe et transformation de *Schwartz-Christoffel* pour trouver la solution, nous utilisons les étapes suivantes :

1^{ère} étape : La transformation de z à Ω

La transformation hodographe Ω transforme le domaine d'écoulement réel dans le plan (x, y) en un domaine d'écoulement de frontière polygonale dans le plan $(\log(\frac{U}{q}), \theta)$ (Figure- 4).

2^{ème} étape : La transformation de Ω à λ

Par la transformation de *Schwartz-Christoffel*, le domaine d'écoulement dans le plan Ω est transformé en un demi plan supérieur de la variable complexe λ (Figure-5).

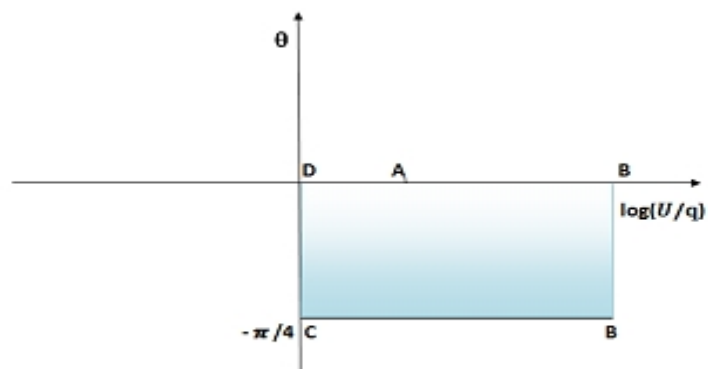


Figure 4 : Le plan Ω

Transformé du plan z par la transformation de *Kirchhoff*

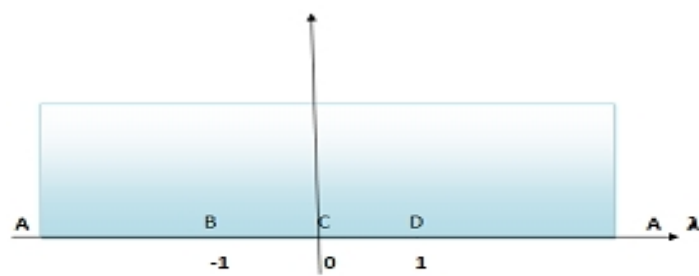


Figure 5 : Le plan λ

Transformé du plan Ω par la transformation de *Schwartz-Christoffel*

Dans le plan λ , les points correspondants sont :

$$A = F(\lambda = \pm\infty), B = F(\lambda = -1), C = F(\lambda = 0), D = F(\lambda = 1).$$

On trouve la représentation conforme suivante

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = a \frac{1}{(\lambda + 1)\sqrt{\lambda(\lambda - 1)}}$$

Par intégration, on trouve :

$$\Omega = a \int \frac{d\lambda}{(\lambda + 1)\sqrt{\lambda(\lambda - 1)}} + b$$

Où a, b des constantes d'intégration.

En fait un changement de variable :

$$\sqrt{\lambda(\lambda - 1)} = t\lambda$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \Omega &= a \int \frac{2}{2 - t^2} + b \\ &= a \frac{\sqrt{2}}{2} \log \left[\frac{\sqrt{\lambda(\lambda - 1)} + \lambda\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda(\lambda - 1)} - \lambda\sqrt{2}} \right] + b \\ &= a \frac{\sqrt{2}}{2} \log \left[\frac{3\lambda - 1 + 2i\sqrt{2\lambda(1 - \lambda)}}{\lambda + 1} \right] + b \end{aligned}$$

Donc :

$$\Omega = a \frac{\sqrt{2}}{2} \log \left[\frac{3\lambda - 1 + 2i\sqrt{2\lambda(1 - \lambda)}}{\lambda + 1} \right] + b$$

Pour $\lambda = 0$, $\Omega = -\frac{i\pi}{4}$ on a :

$$-\frac{i\pi}{4} = a \frac{\sqrt{2}}{2} \log(-1) + b \quad (1)$$

Pour $\lambda = 1, \Omega = 0$ on a :

$$0 = a \frac{\sqrt{2}}{2} \log(1) + b \quad (2)$$

De (2) on a :

$$b = 0$$

Alors :

$$a = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Donc :

$$\Omega(\lambda) = -\frac{1}{4} \log \left[\frac{3\lambda - 1 + 2i\sqrt{2\lambda(1-\lambda)}}{\lambda + 1} \right]$$

Donc :

$$\Omega(\lambda) = \log \left(U \frac{dz}{df} \right) = \log \left[\frac{3\lambda - 1 + 2i\sqrt{2\lambda(1-\lambda)}}{\lambda + 1} \right]^{-\frac{1}{4}}$$

3^{ème} étape :

Le domaine d'écoulement réel dans le plan z est transformé à une bande demi plan inférieur de largeur HU dans le plan de la variable $f = \phi + i\psi$ (Figure-6), on choisissant $\psi = 0$ sur la ligne de courant $ABCD$.

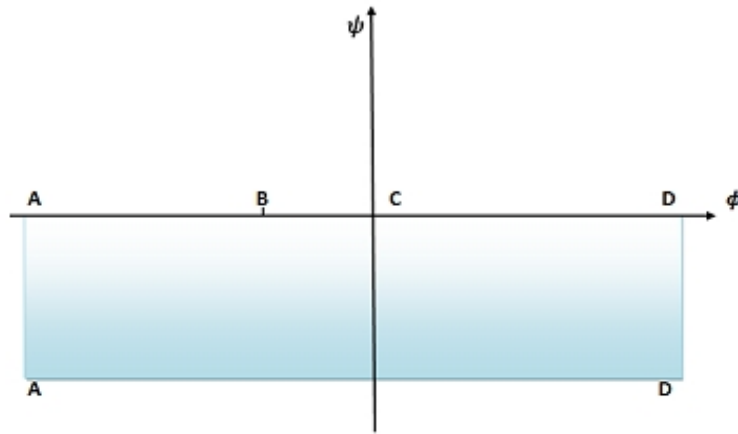


Figure 6 :Le plan f
Transformé du plan z par la transformation de *Schwartz-Christoffel*

4^{ème} étape : La transformation de f à λ

En utilisant la transformation de *Schwartz-Christoffel*, on transforme la bande de largeur HU du plan f en demi plan supérieur de la variable λ (Figure-6), où les correspondants des points B, C, D sont donnés par $(\lambda = -1, \lambda = 0, \lambda = 1)$ d'où :

$$\frac{df}{d\lambda} = a \frac{1}{(\lambda - 1)}$$

Donc :

$$f = a \int \frac{1}{(\lambda - 1)} d\lambda + b$$

Alors :

$$f = a \log(\lambda - 1) + b$$

a et b sont des constantes à déterminer.

Lorsque $\lambda = -1$, (au point B), $f = -1$ alors :

$$-1 = a(i\pi + \log(2)) + b \quad (1)$$

Lorsque $\lambda = 0$, (au point B), $f = 0$ alors :

$$0 = i\pi a + b \quad (2)$$

Donc :

$$a = \frac{1}{\log 2}, b = -\frac{i\pi}{\log 2}$$

Alors :

$$f = \frac{1}{\log 2} \log(\lambda - 1) - \frac{i\pi}{\log 2}$$

On déduit :

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{1}{\log 2(\lambda - 1)}$$

5^{ème} étape : La solution

En utilisant la relation

$$U \frac{dz}{d\lambda} = U \frac{dz}{df} \frac{df}{d\lambda}$$

On a :

Et on a les relation de $(U \frac{dz}{df}$ et $\frac{df}{d\lambda}$), on obtient :

$$U \frac{dz}{d\lambda} = \frac{1}{U \log(2)} \int \frac{1}{(\lambda - 1)} \left[\frac{3\lambda - 1 + 2i\sqrt{2\lambda(1 - \lambda)}}{\lambda + 1} \right]^{-\frac{1}{4}} d\lambda + z_0$$

Donc :

$$z = \frac{1}{U \log(2)} \int \left[\frac{1}{(\lambda - 1)} \left[\frac{3\lambda - 1 + 2i\sqrt{2\lambda(1 - \lambda)}}{\lambda + 1} \right]^{-\frac{1}{4}} \right] d\lambda + z_0$$

Sur la surface libre , $f = \phi$, $\phi \geq 0$, donc la forme de surface libre est donnée par :

$$x(\phi) = \text{Re} \left[\frac{1}{U \log(2)} \int \frac{1}{(\lambda - 1)} \left[\frac{3\lambda - 1 + i 2\sqrt{2}\sqrt{\lambda(1 - \lambda)}}{\lambda + 1} \right]^{-\frac{1}{4}} d\lambda + x_0 \right]$$

$$y(\phi) = \text{Im} \left[\frac{1}{U \log(2)} \int \frac{1}{(\lambda - 1)} \left[\frac{3\lambda - 1 + i 2\sqrt{2}\sqrt{\lambda(1 - \lambda)}}{\lambda + 1} \right]^{-\frac{1}{4}} d\lambda + y_0 \right]$$

$$\begin{cases} x(\phi) = \frac{1}{U \log(2)} \int \left[\frac{1}{\lambda - 1} \cos \left[-\frac{1}{4} \arctan \left[\frac{2\sqrt{2}\sqrt{\lambda(1 - \lambda)}}{3\lambda - 1} \right] \right] \right] d\lambda + x_0 \\ y(\phi) = \frac{1}{U \log(2)} \int \left[\frac{1}{\lambda - 1} \sin \left[-\frac{1}{4} \arctan \left[\frac{2\sqrt{2}\sqrt{\lambda(1 - \lambda)}}{3\lambda - 1} \right] \right] \right] d\lambda + y_0 \end{cases}$$

Sont des intégrales qu'on ne peut pas la résoudre par les méthodes d'intégration connues.

En intégrant numériquement ,on obtient la forme de la surface libre (Figure-7)

Chapitre 3

Résolution de problème d'un écoulement potentiel de fluide parfait incompressible par la méthode des Différences Finies

3.1 Introduction

La méthode des différences finies est une méthode numérique de résolution des équations différentielles ordinaires ou des équations aux dérivées partielles.

Sa formulation est basée sur l'approximation locale au voisinage d'un point donné des fonction dérivées apparaissant dans les équation différentielles.

Les fonction dérivées sont approchées par des fonctions polynomiales données par le développement en série de Taylor.

Dans ce chapitre on essaye d'examiner la possibilité d'appliquer la méthode des différences finies pour résoudre de problème d'écoulement bidimensionnel stationnaire irrotationnel d'un fluide parfait incompressible dans un réservoir avec effets de gravité et de

tension de surface sont négligées.

3.2 Position l'équation :

On étudie dans ce précédent chapitre un écoulement bidimensionnel stationnaire et irrotationnel à surface libre d'un fluide parfait incompressible avec la négligence des forces de gravité et de tension de surface dans un canal à la forme d'un réservoir (Figure -1), on a l'équation de Bernoulli donné par :

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = cte$$

Où : v est la vitesse.

p est la pression.

ρ est la masse volumique.

La pression sur la surface libre est constant, alors l'équation de Bernoulli donné par :

$$\frac{v^2}{2} = Cte.$$

Le problème mathématique construit à détermination de la fonction potentiel ϕ avec des condition.

On a l'écoulement irrotationnel c'est à dire ($\vec{\Omega} = \overrightarrow{rot} \vec{v} = 0$), peut être toujours représentée par le gradient d'une fonction scalaire on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\phi) &= 0 \Rightarrow \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\phi) = 0 \\ \Rightarrow \vec{v} &= \overrightarrow{grad}\phi \\ \Rightarrow v &= \Delta\phi \end{aligned}$$

Alors l'équation de Bernoulli donné par :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\Delta\phi)^2 &= Cet \\ \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right) &= Cet\end{aligned}$$

Alors le problème avec les condition données par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\phi = 0 & \text{interieur d'écoulement .} \\ \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right) = Cet & \text{Dans surface libre } CD \text{ et } C'D. \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 & \text{Dans } AB. \end{array} \right.$$

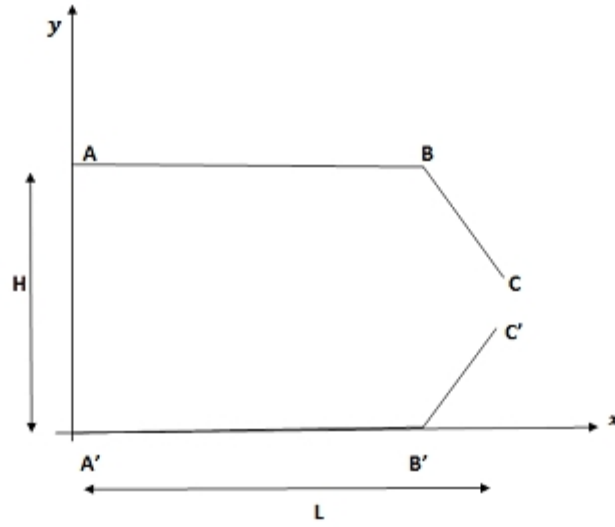


Figure-1 :Réservoir.

3.3 l'application de la méthode des différences finies :

3.3.1 Formulation :

On appliquant sur le plan f et le problème donné par l'équation de Laplace avec une condition de Neumann sur la côté AB comme le montre la (figure -2).

L'équation et la condition de Neumann sont donnée par :

$$\frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right) = C \text{ et } \text{Sur } CD \text{ et } C'D = \Omega \quad (3.1)$$

Et

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{Sur } AB \text{ et } AD \quad (3.2)$$

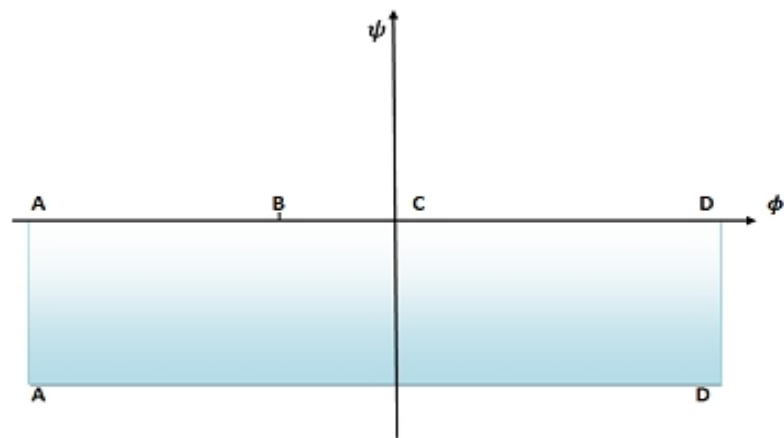


Figure -2 :Le plan f

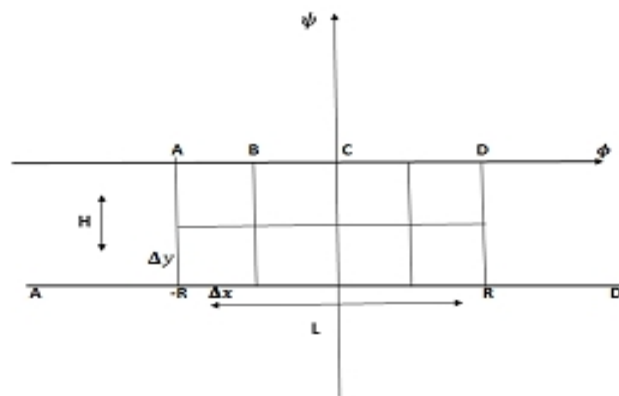


Figure -3 : Discritisation le plan f

3.3.2 Le maillage :

Le domaine Ω étant à frontière régulière est construit à l'aide des données $\Delta x, \Delta y, H, L$, la maillage du domaine rectangulaire régulier.

3.3.3 Le schéma numérique :

L'expression des dérivées secondes de différences finies centrées :

On considère le développement Taylor de $\phi(x_i + h), \phi(x_i - h)$:

$$\begin{aligned}\phi(x_i + h) &= \phi(x_i) + h \phi'(x_i) + \frac{h^2}{2!} \phi^{(2)}(x_i) + \frac{h^3}{3!} \phi^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{4!} \phi^{(4)}(\xi) . \\ \phi(x_i - h) &= \phi(x_i) - h \phi'(x_i) + \frac{h^2}{2!} \phi^{(2)}(x_i) - \frac{h^3}{3!} \phi^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{4!} \phi^{(4)}(\xi) .\end{aligned}$$

Eliminat $\phi(x)$ entre les deux équations, on a :

$$\begin{aligned}\phi''(x_i) &= \frac{\phi(x_i - h) - 2\phi(x_i) + \phi(x_i + h)}{h^2} + O(h^2) \\ O(h^2) &= -\frac{1}{12} h^2 \phi^{(4)}(\xi) \quad x_i - h \prec \xi \prec x_i + h\end{aligned}$$

Les dérivées apparaissant dans l'équation aux dérivées s'écrivent en un point pivot (i, j) de Ω à l'aide d'un schéma de différences centrées :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{\phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2) \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= \frac{\phi_{i,j-1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} + O(\Delta y^2)\end{aligned}$$

Avec : $O((\Delta x)^2) = -\frac{1}{12}(\Delta x)^2 \phi^{(4)}(\xi, \eta) \mid (i, j)$ et $O((\Delta y)^2) = -\frac{1}{12}(\Delta y)^2 \phi^{(4)}(\xi, \eta) \mid (i, j)$

En tronquant l'erreur $O(\Delta x^2 + \Delta y^2)$, l'équation (3.1) s'écrit alors :

$$\frac{\phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{\phi_{i,j-1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} = G, G \text{ constante} \quad (3.3)$$

En posant $h = \Delta x = \Delta y$, donc l'équation (3.3) devient :

$$\phi_{i-1,j} - 4\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j} + \phi_{i,j-1} + \phi_{i,j+1} = h^2 G \quad (3.4)$$

Le schéma aux différences finies de l'équation de Laplace est modifié aux points de la frontière AB, AD

Considérons un point (i, j) de cette frontière .

En ce point la vitesse potentiel est inconnue .On utilise la condition de Neumann pour exprimer la vitesse potentiel en ce point.

Utilisant l'équation de différences finies centrées de la dérivée première on a :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \big|_{(i,j)} = \frac{1}{2h} (\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}) = 0.$$

En résolvant pour $\phi_{i,j+1}$ on obtient : $\phi_{i,j+1} = \phi_{i,j-1}$

Substituant cette valeur dans l'équation (3.4) on obtient :

$$\phi_{i-1,j} - 4\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j} + 2\phi_{i,j-1} = h^2 G \quad (3.5)$$

On considère le plan f (Figure-2), on appliquant la méthode des différences finies.

3.3.4 Formulation :

Les équations et la condition de Neumann sont donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right) = C et & \text{Dans surface libre } CD \text{ (équation de Bernoulli)} \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 = 0 & \text{Dans l'écoulement (équation de continuité)} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 & \text{Sur les côtés } AB, AD \end{array} \right.$$

3.3.5 Le maillage :

On trouve la maillage du domaine rectangulaire régulier.(Figure-3)

3.3.6 Le schéma numérique :

1-L'équation de Bernoulli :

$$\phi_{i-1,j} - 4\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j} + 2\phi_{i,j-1} = h^2 G$$

Tels que : $h = \Delta y = \Delta x$ et G une constante.

2-L'équation de continuité :

$$\phi_{i-1,j} - 4\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j} + 2\phi_{i,j-1} = 0$$

On a au points dans lignes AB, AD la forme asymptotique est inconnue (difficiles de calculer) alors ne peut pas appliquer la méthode des différences finies (il existe plusieurs difficultés) .

Mais si on suppose des conditions sur les côtes $[A, (-R)], [D, (+R)]$ on peut appliquer la méthode des différences finies.

C'est à dire Pour appliquer la méthode des différences finies à la résolution de ce problème il reste d'effectue une étude asymptotique de la vitesse potentiel au voisinage $\phi = \pm R$.

Chapitre 4

Annexes

4.1 Annexe 1 :

4.1.1 Outils mathématiques de la théorie des champs :

Opérateur gradient :

1) Expressions analytiques : On a en coordonnées cartésiennes dans la base (e_1, e_2, e_3) pour une fonction $f = f(x_1, x_2, x_3)$:

$$(\overrightarrow{grad}(f))_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

4) Gradient d'un vecteur : On peut définir le gradient d'un vecteur \overrightarrow{V} de taille n , c'est une matrice de taille $n \times n$ et on a :

$$(\overrightarrow{grad}(\overrightarrow{V}))_{i,j} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$$

Opérateur divergence :

1) Théorème (théorème de Green _ Ostrogradski) : Soit Σ la surface fermée délimitant le volume v , ds le vecteur de surface élémentaire sortant du volume. On a alors pour

tout champ de vecteur \vec{V} :

$$\int \int_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{ds} = \int \int \int_v \text{div}(\vec{V}) d\tau$$

2) Expressions analytique :

En coordonnées cartésiennes : On a

$$\text{div}(\vec{V}) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Opérateur rotationnel :

1) Expressions analytique

En coordonnées cartésiennes : On a

$$\vec{rot} \vec{A} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) e_1 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) e_2 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) e_3$$

2) Proposition : Si un champ de vecteur \vec{W} est à flux conservatif c'est à dire :

$$\text{div} \vec{W} = 0$$

alors il existe un champ de vecteur \vec{V} tel que

$$\vec{W} = \vec{rot} \vec{V}$$

Opérateur Laplacien :

1) Définition (Laplacien d'un champ scalaire) : Transforme un champ scalaire en champ scalaire :

$$\Delta f = \text{div}(\vec{grad} f)$$

2) Expressions analytique :

En coordonnées cartésiennes : On a

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

3) Définition (Laplacien d'un champ vectoriel) : Transforme un champ vectoriel en un champ vectoriel :

$$\vec{\Delta} \vec{V} = \overrightarrow{grad}(div(\vec{V})) - \overrightarrow{rot} \overrightarrow{rot} \vec{V}$$

4) Expression analytique du Laplacien vectoriel :

En coordonnées cartésiennes : On a

$$\vec{\Delta} \vec{V} = \sum_{i=1}^n \Delta V_{x_i} e_i$$

Opérateur symbolique nabla :

C'est un opérateur de dérivation vectoriel.

Ses composantes en coordonnées cartésiennes sont :

$$(\vec{\nabla})_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

On peut écrire le gradient, la divergence et le rotationnel grâce à cet opérateur sym-

bolique :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{grad}(f) &= \overrightarrow{\nabla} f \\
 \overrightarrow{rot} \overrightarrow{V} &= \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{V} \\
 div(\overrightarrow{V}) &= \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V} \\
 \Delta f &= \overrightarrow{V}^2 f \\
 \overrightarrow{\Delta} \overrightarrow{V} &= \overrightarrow{V}^2 \overrightarrow{V}
 \end{aligned}$$

Formulaire relatif aux opérateurs : Soit f un champ scalaire, \overrightarrow{A} et \overrightarrow{B} deux champs vectoriels :

La divergence d'un gradient est égale au Laplacien :

$$div(\overrightarrow{grad} f) = \Delta f$$

La rotationnel d'un gradient est nul :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad} f) = \overrightarrow{0}$$

La divergence d'un rotationnel est nulle :

$$div(\overrightarrow{rot} \overrightarrow{A}) = 0$$

4.2 Annexe 2 :

4.2.1 Introduction à la méthode des différences finie :

Classification des EDP :

Considérons une EDP du second ordre ayant la forme suivante :

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + f u = g \quad (1)$$

Où $u = u(x, y)$ est la fonction recherchée, dépendante de x et y .

On dit que l'équation (1) est :

- hyperbolique ssi $b^2 - 4ac > 0$.
- parabolique ssi $b^2 - 4ac = 0$.
- elliptique ssi $b^2 - 4ac < 0$.

Le développement de Taylor :

1) Développement en série de Taylor : Le développement en série de la fonction f au voisinage du point $x = x_0$

L'équation s'écrit :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0). \end{aligned} \quad (2).$$

2) Développement limité de Taylor : En fait, dans l'équation (2), on ne peut tenir compte que d'un nombre fini de termes : on effectue une troncature de la série.

On a donc un développement à termes finis c'est le développement limité de Taylor (formule de Taylor) de la fonction f autour du point $x = x_0$

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + R_n \quad (3)$$

Le dernier terme de l'équation (3) est appelé reste ou erreur de troncature, est donné par la formule de la Lagrange :

$$R_n = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) \quad x-x_0 < \xi < x+x_0 \quad (4)$$

Cette erreur est de l'ordre de grandeur de $(x-x_0)^{n+1}$ et est notée par $O(x-x_0)^{n+1}$. Puisque la fonction est infiniment dérivable $f^{(n+1)}(\xi)$ existe et est bornée, puisque $\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, la série converge. La formule de Taylor est utilisée pour approcher les fonctions par des fonctions polynomiales. En posant $h = \Delta x = x - x_0$ la formule de Taylor (3) devient :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + O(h^{n+1}) \quad (5)$$

Expression des dérivées secondes :

a) Différences finies en avant : on a écrit les développements :

$$f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x_i) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(\xi) \quad (16)$$

$$f(x_i + 2h) = f(x_i) + 2hf'(x_i) + 2h^2f^{(2)}(x_i) + \frac{8}{3!}h^3f^{(3)}(\xi) \quad (17)$$

Éliminant $f(x_i)$ entre les deux équations, on obtient :

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_i + h) + f(x_i + 2h)}{2h} + O(h) \quad (18)$$

$$O(h) = -hf^{(3)}(\xi) \quad x_i < \xi < x_i + 2h \quad (19)$$

L'équation (18) représente l'expression de la dérivée seconde écrit par un schéma de différences finies en avant.

b)Différences finies en arrière : On a

$$f(x_i + h) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x_i) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(\xi) \quad (20)$$

$$f(x_i - 2h) = f(x_i) - 2hf'(x_i) + 2h^2f^{(2)}(x_i) - \frac{8}{3!}h^3f^{(3)}(\xi) \quad (21)$$

Eliminant $f(x_i)$ entre les deux équations ,on obtient :

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i - 2h) - 2f(x_i - h) + f(x_i)}{2h} + O(h) \quad (22)$$

$$O(h) = h f^{(3)}(\xi) \quad x_i - 2h \prec \xi \prec x_i \quad (23)$$

L'équation (22) représente l'expression de la dérivée seconde écrit par un schéma de différences finies en arrière.

c)Différences centrées : On a

$$f(x_i + h) = f(x_i) + h f'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x_i) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\xi) \quad (24)$$

$$f(x_i - h) = f(x_i) - h f'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x_i) - \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\xi) \quad (25)$$

Eliminant $f(x_i)$ entre les deux équations ,on a :

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i - h) - 2f(x_i) + f(x_i + h)}{h^2} + O(h^2) \quad (26)$$

$$O(h^2) = -\frac{1}{12}h^2f^{(4)}(\xi) \quad x_i - h \prec \xi \prec x_i + h \quad (27)$$

Qui est un schéma de différences finies centrées de la dérivée seconde.

Procédure de résolution des problème aux limites :

La résolution d'un problème aux limites par la méthode des différences finies se fait selon les principales étapes suivantes :

- a) Construire le maillage ou grille du domaine Ω .
- b) Transformer l'équation aux dérivées partielles et l'exprimer sous forme de molécule ou schéma numérique de différences finies.
- c) Ecrire l'équation de différences finies aux points du maillage.
- d) Obtenir le système d'équations algébriques discrètes $[K] \{T\} = \{T_c\}$
 $\{T_c\}$ est le vecteur connu donné par les conditions aux limites non homogènes.
 $[K]$ est la matrice des coefficients et $\{T\}$ est le vecteur solution recherché en tout point du maillage.
- e) Trouver la solution $\{T\}$ en résolvant le système d'équation $[K] \{T\} = \{T_c\}$.

Conclusion :

Dans ce mémoire on a donné la résolution analytique d'un écoulement issue d'un curved nozzle en 2D considérant $\alpha=\pi/4$ avec l'horizontale et négligeant la gravité et la tension de surface (trouver la forme de surface libre) , utilisant les transformations conformes et la transformation de Schwartz-Christoffel en essayant aussi de résoudre numériquement ce problème avec l'application de la méthode des différences finies ,qui a déjà employé par ACKERBERGR.C et LIUTAJO (1987) en citant quelques difficultés rencontrés durant l'application de cette dernière surtout les frontières du domaine de discrétisation sur qui seront des futures recherches .

Bibliographie :

- [1] **Ranald V. Giles, Jack B. Evett, Chenglui**, Mécanique des fluides et hydraulique, (4,81), décembre 1994.
- [2] **Jon Paraschivoiu, Michel Prud'homme, Luc Robillard, Patrick Vasseur**, Mécaniques des fluides, (13,103-106,247-249), 2003.
- [3] **Jean — Francois SINI**, Mécaniques des fluides, (34,-42,104), 2008.
- [4] **J. Rousel**, Cours de Mécanique des fluides, (7-9,11-13), 2005-2006.
- [5] **TAH ARABBES**. Miloud, Méthodes numériques Tome 1, (53-60), 2007.
- [6] **Merzak. DAMOU**, Mécanique des fluides, (28-31,71-77) 1996.
- [7] **S. Candel**, Mécanique des fluides cours, Paris, 1995.
- [8] **J. CARBONE ET — M. ROQUES** (académie de Nancy-Metz), Mécanique des fluides.
- [9] **Wahiba. DELLOM**, Résolution numériques d'un problème non linéaire dans un domaine à frontière libre devant un obstacle (modèle House), Thèse magister, 2004.
- [10] **Hakima. LAASMI**, Ecoulement à surface libre sur une depression de forme triangulaire, Thèse magister.
- [11] **Fabrice. TOISON**, Validation d'une methode numérique générale de calcul d'écoulements bidimensionnels de fluide parfait.
- [12] **Eric. Goncalvés**, Méthode, analyse et calculs numérique, 2005.
- [13] **B. Bouderah**, A. Gasmi and H. Serguine, Zero gravity of free _ surface jet flow, 2007.
- [14] **N. Piskounov**, Calcule différentiel et intégral Tome 1, 1980.
- [15] **A. Taik**, Cours formation doctorale, FST _ Mohammedia, 2009.
- [16] **C. Ancey**, Analuse différentielle Outils mathématiques pour la dynamique des fluides.
- [17] **Christophe. RAUFASTE**, Introduction au devoir de Mécanique des fluides, (17,36), 2010-2011.
- [18] **Version 1,2**, Mécaniques des fluides : statique et cinématique, (17), 2008.